

निर्देश- (1) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। (2) प्रश्न-पत्र में दिये निर्देश, सावधानीपूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर लिखिए। (3) प्रश्न-पत्र में दो खंड 'अ' एवं 'ब' दिये गये हैं। (4) खण्ड 'अ' में दिये गये प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं जिनके अन्तर्गत रिक्त स्थानों की पूर्ति, सत्य/असत्य, सही जोड़ी बनाना, एक शब्द में उत्तर तथा सही विकल्प का चयन करना है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है। (5) खण्ड 'ब' में प्रश्न क्रमांक 6 से 21 में आंतरिक विकल्प दिये गये हैं। (6) प्रश्न क्रमांक 6 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक आवंटित है। (7) प्रश्न क्रमांक 13 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक आवंटित है। (8) प्रश्न क्रमांक 20 तथा 21 में प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक आवंटित है।

खण्ड-अ ( वस्तुनिष्ठ प्रश्न )

प्रश्न 1. प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्न में दिये गये विकल्पों में से सही उत्तर लिखिए-

(1) यदि  $\frac{2x}{(x-3)(x+a)} = \frac{6}{x-3} + \frac{B}{x-a}$ , तो  $\alpha$  एवं B का मान है-

- (अ) 2, -4 (ब) 4, -2  
(स) -2, -4 (द) -2, 4

(2)  $\tan^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{3}{2} \right)$  का मान है-

- (अ)  $\tan^{-1} \left( -\frac{2}{7} \right)$  (ब)  $\tan^{-1} (4)$   
(स)  $\tan^{-1} \left( \frac{3}{7} \right)$  (द)  $\tan^{-1} \left( \frac{8}{7} \right)$

(3) एक रेखा के दिक् अनुपात 1, 2, 3 हैं, तो उसकी दिक् कोज्याएँ होंगी-

- (अ)  $-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$  (ब)  $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$   
(स)  $\sqrt{14}, \sqrt{14}, \sqrt{14}$  (द) 1, 2, 3

- (4) यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  हों, तो इस त्रिभुज के केन्द्रक का स्थिति सदिश होगा-

(अ)  $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$  (ब)  $\frac{\vec{a}}{3}$

(स)  $\frac{\vec{b}}{3}$  (द)  $\frac{\vec{c}}{3}$

- (5)  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$  का अवकल गुणांक है-

(अ) 0 (ब)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(स)  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (द)  $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

प्रश्न 2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य बताइए-

- (अ) मूल बिन्दु से समतल  $6x - 3y + 2z + 14 = 0$  की दूरी 2 है।  
 (ब) यदि सदिश  $\hat{i} - \lambda\hat{j} + \hat{k}$  और  $\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$  परस्पर लम्बवत् हैं, तो  $\lambda$  का मान 6 है।  
 (स) यदि दो चरों  $x$  एवं  $y$  में से चर  $x$  चर  $y$  पर निर्भर नहीं करता है, तो उनके मध्य शून्य सह-संबंध होगा।  
 (द)  $4396E05 \div 3512E02 = .1251E08$ .  
 (इ) एक गोले का केन्द्र  $(3, 6, -4)$  है, यह समतल  $2x - 2y - z - 10 = 0$  को स्पर्श करता है, इस गोले की त्रिज्या  $4/3$  होगी।

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइये-

(अ)

(ब)

(i)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$

(a)  $\log (\sec x + \tan x) + c$

(ii)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$

(b)  $x \sin^{-1} \sqrt{1-x^2} + c$

(iii)  $\int \sec x dx =$

(c)  $\frac{1}{2a} \log \left( \frac{a+x}{a-x} \right) + c$

$$(iv) \int \sin^{-1} x \, dx = \quad (d) \frac{1}{a} \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$(v) \text{ यदि } a = b, \text{ तो } \int \frac{dx}{a + b \cos x} = \quad (e) \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

प्रश्न 4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (अ) समाश्रयण रेखाओं की संख्या ..... है।
- (ब) एक कण सरल रेखा में गतिमान है। उसका विस्थापन  $s = 4t - 2t^2$  से दिया जाता है तो कण ..... सेकण्ड बाद विरामावस्था में आ जायेगा, जहाँ 1 सेकण्ड में है।
- (स)  $e^x$  का  $x^4$  के सापेक्ष अवकल गुणांक ..... है।
- (द) बिन्दुओं  $(1, -2, 3)$  एवं  $(3, 2, 4)$  से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ..... है।
- (इ) एक त्रिभुज की भुजाओं द्वारा क्रमानुसार निरूपित सदिशों का योग ..... होता है।

प्रश्न 5. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर एक शब्द/वाक्य में दीजिए-

- (अ) सिम्पसन के एक तिहाई नियम का सूत्र लिखिये।
- (ब) आंकिक विधियों में समलम्ब चतुर्भुज नियम का सूत्र लिखिये।
- (स) समतल  $\vec{r} \cdot (6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 7$  पर मूल-बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई क्या है?
- (द) सिम्पसन का नियम किस सिद्धान्त पर आधारित है?
- (इ) समीकरण  $x^4 - x - 10 = 0$  का मूल किस अन्तराल में स्थित है?

**खण्ड-ब (अति लघुत्तरीय प्रश्न)**

प्रश्न 6. भिन्न  $\frac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2}$  को आंशिक भिन्नों में व्यक्त कीजिये।

(अथवा) भिन्न  $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$  को आंशिक भिन्नों में व्यक्त कीजिये।

प्रश्न 7. यदि  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi/2$ , तो सिद्ध कीजिये कि-  
 $xy + yz + zx = 1$ .

(अथवा) सिद्ध कीजिये कि-

$$\cos [\tan^{-1} (\sin (\cos^{-1} x))] = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

प्रश्न 8. यदि  $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$  तो सिद्ध कीजिये कि-

$$(1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy - 1 = 0.$$

(अथवा)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 9. यदि  $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \dots \infty}}}$ , तो दिखाइये कि-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$$

(अथवा) फलन  $\tan^{-1} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$  का  $\sin^{-1} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$  के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 10. रोले की प्रमेय लिखिए तथा इसकी जाँच फलन  $f(x) = x^2 - 1$  के लिये अन्तराल  $[-1, 1]$  में कीजिए।

(अथवा) एक वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी प्रति सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। क्षेत्रफल में वृद्धि किस दर से होगी यदि त्रिज्या 7 सेमी है।

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिये कि सहसंबंध गुणांक का मान -1 से 1 के बीच होता है।

(अथवा) निम्न आँकड़ों के लिये सहसंबंध गुणांक की गणना कीजिये-

| x  | y  |
|----|----|
| 15 | 12 |
| 16 | 17 |
| 17 | 15 |
| 17 | 16 |
| 18 | 12 |
| 20 | 15 |
| 10 | 11 |

प्रश्न 12. यदि समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण  $\theta$  हो, तो सिद्ध कीजिये कि-

$$\tan \theta = \left| \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right| \frac{p^2 - 1}{p}$$

(अथवा) यदि समाश्रयण रेखाएँ क्रमशः  $2x - 9y + 6 = 0$  तथा  $x - 2y + 1 = 0$  हों, तो सहसंबंध गुणांक की गणना कीजिये।

( लघु उत्तरीय प्रश्न )

प्रश्न 13. उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिये जिनकी दिक् कोज्याएँ निम्नांकित समीकरणों द्वारा निर्धारित हैं-

$$3l + m + 5n = 0, 6mn - 2nl + 5lm = 0.$$

( अथवा ) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दुओं  $(-1, 1, 1)$  एवं  $(1, -1, 1)$  से गुजरता है तथा समतल  $x + 2y + 2z = 5$  पर लम्ब है।

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिये कि-

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

( अथवा ) एक गोले के व्यास के दो सिरों के निर्देशांक  $(4, 5, 1)$  तथा  $(3, -2, -1)$  हैं। गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिये तथा उससे कार्तीय समीकरण भी व्युत्पन्न कीजिये।

प्रश्न 15.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$  का मान ज्ञात कीजिये।

( अथवा ) सांतत्यता की परिभाषा लिखिये एवं सिद्ध कीजिये कि  $f(x) = |x|$ ,  $x = 0$  पर संतत है।

प्रश्न 16.  $\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$  का मान ज्ञात कीजिये।

( अथवा )  $\int \frac{dx}{\sin(x-\alpha) \sin(x-\beta)}$  का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 17. दो वक्रों

$$y^2 = 4ax \text{ और } x^2 = 4ay$$

के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

( अथवा ) सिद्ध कीजिये कि-

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \pi/4$$

प्रश्न 18. अवकल समीकरण

$$(x+y) dy = (x+y+1) dx$$

को हल कीजिये।

(अथवा) अवकल समीकरण

$$(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$$

का हल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 19. छात्र A के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता  $\frac{3}{5}$  तथा B के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता

$\frac{4}{5}$  है। A का उत्तीर्ण होना, B का उत्तीर्ण होना दोनों स्वतंत्र घटनाएँ मानकर

निम्नांकित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिये-

- (अ) दोनों छात्र परीक्षा में उत्तीर्ण हों।
- (ब) केवल A उत्तीर्ण हो।
- (स) केवल B उत्तीर्ण हो।
- (द) दोनों में से केवल एक उत्तीर्ण हो।
- (इ) दोनों में से कोई उत्तीर्ण न हो।

(अथवा) एक सिक्का 6 बार उछाला जाता है। कम-से-कम 3 शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

प्रश्न 20. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दुओं  $(1,1,1)$   $(1,2,1)$   $(1,1,2)$  और  $(2,1,1)$  से होकर जाता है।

(अथवा) बिन्दु  $(1,2,3)$  का रेखा

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$$

पर प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 21. सदिश विधि से घन के विकर्णों के मध्य कोण ज्ञात कीजिये।

(अथवा) उन रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिये जिनके सदिश समीकरण-

$$\vec{r} = (1+2\lambda)\hat{i} + (2+3\lambda)\hat{j} + (3+4\lambda)\hat{k}$$

$$\text{तथा } \vec{r} = (2+3\mu)\hat{i} + (3+4\mu)\hat{j} + (4+5\mu)\hat{k} \text{ है।}$$